

RASSEGNE

LO SVILUPPO DELLA CONOSCENZA NUMERICA: ALLE ORIGINI DEL «CAPIRE I NUMERI»

DANIELA LUCANGELI E PATRIZIO E. TRESSOLDI

Università di Padova

Riassunto. La presente rassegna prende in esame le principali ipotesi a carattere evolutivo, inerenti allo sviluppo della conoscenza numerica, ossia della capacità di capire i fenomeni attraverso principi quantitativi e attraverso il complesso sistema dei numeri. In particolare nell'analisi proposta vengono riportati sia i termini generali del dibattito inerente al rapporto tra conoscenza numerica e le altre competenze cognitive, sia ipotesi specifiche sull'acquisizione della conoscenza numerica. I tre nuclei di indagine considerati riguardano lo sviluppo della conoscenza numerica preverbale, lo sviluppo delle abilità di conteggio, e lo sviluppo delle abilità di lettura e scrittura del numero.

INTRODUZIONE

La conquista della conoscenza numerica è senza dubbio uno dei processi più affascinanti e complessi dello sviluppo infantile. Come giungono i bambini a riconoscere le quantità, a rappresentarle e a manipolarle attraverso un sistema simbolico complesso quale quello dei numeri?

Nell'analisi qui proposta vengono riportati sia i termini generali del dibattito inerente al rapporto tra conoscenza numerica e le altre competenze cognitive, sia ipotesi specifiche sull'acquisizione della conoscenza numerica, dai meccanismi preverbal di riconoscimento delle quantità all'uso competente del sistema numerico orale e scritto.

Riguardo al *dibattito generale*, inerente al rapporto tra conoscenza numerica e le altre competenze cognitive, vengono prese in esame la prospettiva piagetiana e neo-piagetiana, in particolare il contributo di Robbie Case relativo al rapporto tra lo sviluppo di schemi concettuali e l'evoluzione di competenze specifiche tra cui la conoscenza numerica, sia la prospettiva assunta dalle ricerche contemporanee attente a mettere a fuoco l'interdipendenza cognitiva dei sistemi di elaborazione dei numeri e del linguaggio.

Ringraziamo Brian Butterworth e Carlo Umiltà per averci sollecitato alle riflessioni presenti in questo lavoro. Ringraziamo Beatrice Benelli, Cesare Cornoldi e Renzo Vianello per i preziosi suggerimenti.

Riguardo alle ipotesi di *sviluppo della conoscenza numerica*, poiché la letteratura si articola in un panorama complesso e non lineare di modelli interpretativi, per chiarezza espositiva le ricerche vengono presentate facendo riferimento ad alcuni nuclei di indagine. In particolare le domande cruciali intorno a cui si intesse la discussione sono almeno tre:

- Come compare e si sviluppa la capacità di riconoscere le quantità relative ad eventi e fenomeni? A tale domanda cercano di rispondere soprattutto le ricerche sullo sviluppo della conoscenza numerica preverbale;

- Come compare e si sviluppa la capacità di codificare le quantità attraverso il sistema verbale dei numeri? A tale domanda cercano di rispondere soprattutto le ricerche inerenti allo sviluppo delle abilità di conteggio;

- Come compare e si sviluppa la capacità di utilizzare il sistema simbolico dei numeri arabi? A tale domanda cercano di rispondere soprattutto le ricerche inerenti allo sviluppo delle abilità di lettura e scrittura del numero.

IL DIBATTITO GENERALE: L'INTERDIPENDENZA COGNITIVA DEL SISTEMA DI ELABORAZIONE DEI NUMERI

Come già evidenziato, anche l'interrogarsi sullo sviluppo della conoscenza numerica ha concorso a far emergere nella riflessione psicologica una questione di carattere generale quanto mai delicata: come va intesa l'evoluzione delle diverse abilità implicate nella comprensione e nella rappresentazione del mondo, come un sistema gerarchico e stadiale, o come un insieme di abilità distinte e indipendenti, o ancora come un sistema integrato ed interagente? In particolare riguardo al rapporto che intercorre tra lo sviluppo del sistema di elaborazione del numero e gli altri sistemi cognitivi, le riflessioni si sono articolate almeno in due distinte linee interpretative identificabili nelle proposte alla base del modello piagetiano ed in quelle alla base delle ricerche sull'interdipendenza tra conoscenza numerica e conoscenza verbale.

L'interdipendenza cognitiva del sistema di elaborazione dei numeri l'ipotesi piagetiana

Padre di una delle prime vere e proprie teorie cognitive intorno all'elaborazione del concetto di numero è senz'altro Piaget (Piaget e Szeminska, 1941). Sua l'ipotesi di un rapporto inscindibile tra le strut-

ture d'intelligenza generale e l'evoluzione di competenze numeriche nelle abilità di pensiero. In particolare egli ha ricondotto l'evoluzione delle strutture che presiedono la conoscenza numerica al passaggio dell'intelligenza dal livello del pensiero irreversibile e preoperatorio al livello del pensiero concreto reversibile e delle operazioni logiche. Tale passaggio permette di giungere alla padronanza sia di vere e proprie *operazioni logiche* (che consistono nel coordinare in vario modo i dati senza tener conto delle condizioni spaziali o temporali entro cui possono trovarsi i dati stessi), sia di *operazioni spazio-temporali* (che consistono nel coordinare in vario modo dati di ordine spaziale, temporale e spazio-temporale). Sono le operazioni spazio-temporali a garantire al bambino la capacità di riconoscere come valori invarianti i rapporti spaziali di ordine topologico e di ordine metrico (distanza, lunghezza, area, volume), o certe quantità fisiche come la quantità e la permanenza della sostanza, il peso, la durata, la velocità. E sono le operazioni logiche a permettergli di utilizzare nozioni come quelle di classe, di serie, e di numero.

D'altra parte, secondo Piaget, l'essere in grado di produrre la sequenza verbale dei numeri non vuol dire saper contare utilizzando il concetto di numero. I bambini possono infatti usare i numeri senza comprenderne il significato. Occorre prima che essi si rendano conto che ogni parola-numero corrisponde ad un oggetto, e che si rendano conto della corrispondenza tra la sequenza numerica e la quantità dell'insieme considerato. Affinché ciò sia possibile, è necessario giungere a padroneggiare proprio le operazioni logiche di classificazione e di seriazione.

Studi successivi hanno in realtà mostrato diverse debolezze del modello piagetiano, soprattutto per quanto riguarda la scansione degli stadi di sviluppo delle abilità numeriche (McGarrigle e Donaldson, 1975; Markman e Sibert, 1976; Mehler e Bever, 1978; Siegal, 1991a; Vianello e Marin, 1997). Elementi di debolezza sono stati inoltre riscontrati per ciò che riguarda le formulazioni linguistiche dei compiti piagetiani. Markman e Sibert (1976) hanno verificato ad esempio che le risposte dei bambini sono facilitate se nelle domande vengono utilizzati nomi di collezioni (foresta, grappolo, mazzo), anziché di classi (alberi, acini, fiori). A livello di organizzazione concettuale la collezione può essere psicologicamente più forte poiché fondata sulla relazione «essere parte di», rispetto alla classe in cui la relazione tra gli elementi è «essere incluso in».

È stato inoltre riscontrato che i bambini possono essere indotti a sbagliare a causa di incompetenza conversazionale, dal momento che le domande presentate nei diversi compiti richiedono di focalizzare l'attenzione sia su informazioni quantitative che percettive e spaziali (Siegal, 1991a, 1991b; McGarrigle e Donaldson, 1975). L'errore nelle

risposte può dunque essere dovuto non soltanto alla mancata comprensione degli aspetti quantitativi, ma anche ad ambiguità percettive e spaziali. Girelli, Lucangeli e Butterworth (2000) hanno recentemente dimostrato al riguardo la difficoltà incontrata dai bambini più piccoli nel riconoscimento e nella comparazione di quantità numeriche qualora il compito presenti condizioni percettivamente e/o quantitativamente ambigue (effetto stroop numerico): i bambini più piccoli fanno molta fatica a riconoscere quale numero sia maggiore tra due, dei quali uno scritto in dimensioni percettivamente più grandi, o a riconoscere l'uguaglianza di quantità che si riferiscono a oggetti percettivamente di grandezza differente (ad esempio elefanti e ciliegie) [Per un approfondimento degli aspetti specifici di tale dibattito, si vedano Butterworth, 1999; Lucangeli, 1999].

Lo sviluppo del senso del numero secondo Case

Merito di Robbie Case nella ricerca dello sviluppo della conoscenza numerica è stato, tra gli altri, quello di avere approfondito in modo specifico come si possa passare dal conteggio alla comprensione delle relazioni tra tutti i numeri del sistema numerico, riprendendo ed espandendo l'impostazione piagetiana di schemi concettuali primitivi. In sintesi (rimandando il lettore a Case e Okamoto, 1996, e Case, 2000, per ulteriori approfondimenti), questo autore ricostruisce la comprensione delle relazioni tra numeri interi partendo da alcuni schemi primitivi, in particolare lo schema del contare (vedi paragrafo 3) e lo schema di aggiungere e togliere. Da questi schemi di comprensione, tramite l'esperienza, si arriva al collegamento e alla loro trasformazione in uno nuovo che diventerà la fonte concettuale della costruzione della linea mentale dei numeri per poi passare alla differenziazione degli elementi in unità, decine, centinaia ecc. In particolare, l'idea fondamentale che sta alla base del modello psicologico di Case è che il senso del numero dei bambini dipenda dalla presenza di potenti schemi organizzatori denominati «strutture concettuali centrali» che costituiscono reti di concetti e relazioni che sottostanno alla maggior parte dei compiti che i bambini devono padroneggiare.

Le strutture concettuali dei bambini sono costituite da tre componenti:

1. Strutturale: che specifica gli elementi e le relazioni che ogni struttura concettuale comporta;
2. Evolutiva: che specifica le sequenze e i processi attraverso cui le strutture si costituiscono;
3. Contestuale: che specifica in quale modo le strutture concettuali

centrali vengano astratte da contesti e, quindi, come vengano influenzate dai vari contesti.

In particolare, la componente evolutiva che caratterizza lo sviluppo del senso del numero nel bambino si articola nei seguenti momenti:

- Il consolidamento di due schemi primitivi: uno verbale, digitale e sequenziale che vede il bambino in grado di procedere alle prime operazioni di conteggio verbale; l'altro spaziale ed analogico che permette di individuare situazioni di numerosità relativa (sono di più-sono di meno) e di operatività concreta (aggiungere-togliere).

- La connessione e l'interconnessione dei due schemi precedenti ne forma uno nuovo che trasforma la comprensione del campo da parte dello studente e costituisce il nucleo della struttura concettuale centrale, da cui dipenderanno i futuri apprendimenti. Si costituisce, in questa fase, una linea mentale del conteggio in cui i movimenti avanti e indietro equivalgono all'applicazione del + (più) e del - (meno).

- La differenziazione di nuovi elementi diventa possibile tramite le rappresentazioni delle proprietà numeriche: il bambino inizia a differenziare unità, decine e centinaia e a distinguere il numero oggetto dal numero operatore.

- La comprensione dell'intero sistema, in cui sono inclusi gli elementi differenziati, è la fase in cui gli alunni comprendono il sistema complessivo di cui ognuna delle rappresentazioni è una parte, comprendono così anche le relazioni tra le varie parti. Ciò significa che vengono comprese le relazioni intercorrenti tra unità, decine e centinaia (di tipo additivo, moltiplicativo, ...) e le generalizzazioni dell'intero sistema numerico.

Per quanto riguarda l'apprendimento dei numeri interi, che sono quelli che interessano il modello psicologico di Case, questo avviene secondo la sequenza rappresentata nella figura 1.

I passaggi che vengono compiuti nell'attività della prima fase sono rappresentati da Case nella figura 2 che segue.

Nella riga n. 1 notiamo che il conteggio dei numeri è collegato alla sequenza verbale ed è bidirezionale (viene dopo, viene prima); la riga n. 2 dà l'idea della conoscenza globale di quantità discrete: spostando un elemento si formano insiemi maggiori e/o minori; la riga n. 3 unisce i due schemi precedenti e permette di capire che il movimento avanti e indietro lungo la linea dei numeri corrisponde all'addizione o alla sottrazione di una unità; la riga n. 4, infine, mostra come la conoscenza simbolica formale permetta di capire che i numeri scritti corrispondono sia agli insiemi, sia alle posizioni delle sequenze delle parole-numero e che operazioni come + (più) si riferiscono sia a passi avanti nella sequenza numerica, sia nella risoluzione di un'addizione.

Case dà grande importanza alla linea mentale dei numeri e alla sua rappresentazione ed integrazione. Essa, come rappresentazione, costi-

Livello di Comprensione	
	Numeri interi
Livello 1: Consolidamento degli Schemi Primitivi <i>A: digitale</i> <i>B: analogico</i>	A: Schema del contare B: Schema qualitativo di quantità (più/meno aggiungere e togliere)
Livello 2: Costruzione di un Elemento Nuovo $A - B$	Linea mentale dei numeri, in cui contare è un'opera- zione che equivale ad ag- giungere o togliere
Livello 3: Differenziazione di Nuovi Elementi $A_1 - B_1; A_2 - B_2$	Differenziazione fra unità, decine, centinaia. Idem fra numero come oggetto (posizione) e nu- mero utilizzato per segui- re un'operazione
Livello 4: Comprensione del Sistema Totale $A_1 - B_1 \times A_2 - B_2 \times A_3 - B_3$	Comprensione di unità, decine, centinaia e della relazione tra loro, gene- ralizzata a tutto il campo dei numeri interi

FIG. 1. Sequenza dell'apprendimento dei numeri interi secondo il modello psicologico di Case.

tuisce anche un interprete numerico, permette cioè di passare da una affermazione verbale ad una rappresentazione quasi spaziale. Per risolvere un problema del tipo: ho tre figurine, me ne regalano altre 8. Si assegna il 3 alla rappresentazione spaziale congruente, si prende la seconda affermazione: 8 e si compie un viaggio. Si parte dalla posizione già specificata e ci si muove verso destra di tanti posti quanti sono quelli delle unità del secondo numero. «queste due funzioni (specificazione di una posizione e di una distanza) sono molto generali e sono necessarie per risolvere un'ampia varietà di problemi matematici elementari» (Okomoto, 1996).

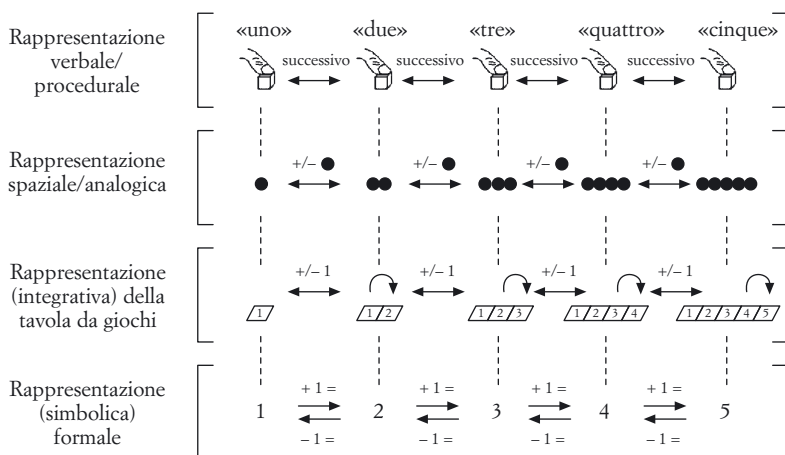


FIG. 2. Struttura concettuale centrale dei numeri interi secondo il modello di Case.

L'interdipendenza cognitiva del sistema di elaborazione dei numeri

Il dibattito contemporaneo, più che all'interdipendenza della conoscenza numerica e delle strutture d'intelligenza generale, si riferisce al rapporto tra i diversi sistemi di elaborazione della conoscenza. In particolare, nell'ambito degli studi relativi al rapporto che la cognizione numerica ha con gli altri sistemi di conoscenza, cruciale è la discussione inerente all'indipendenza del sistema di elaborazione del numero da quello degli altri sistemi di elaborazione, in specifico da quello del linguaggio (Collignon, Leclercq e Mahy, 1977).

Diverse ricerche hanno messo in luce alcuni aspetti del delicato rapporto tra linguaggio e numeri. Come i suoni del linguaggio, anche le quantità sono esprimibili attraverso il canale uditivo-vocale con il codice verbale, e attraverso il canale visivo-gestuale con diverse modalità: arabica, grafico-analogica, e gestuale. In particolare, i numeri nel codice verbale hanno, come ogni «segno linguistico», un rapporto convenzionale con il significato che sottintendono (ossia, nel caso dei numeri, la quantità). L'unica ragione per cui la quantità contenuta in un insieme di sette torte venga definita con il termine «sette» è infatti soltanto una ragione convenzionale. Anche per iscritto il linguaggio matematico può essere veicolato attraverso il codice verbale, la cui scrittura tipica è quella del codice arabico. Il lessico di questo codice è rappresentato da singoli segni grafici che stanno in rapporto convenzionale con le corrispondenti traduzioni verbali. D'altra parte si può certo avere il concetto di numero, possedere il significato della

quantità, senza conoscere il simbolismo delle cifre, ed è appurato che la capacità di comprendere la numerosità di un insieme non è proprio soltanto della specie umana (per una sintesi si veda Butterworth, 1999).

Se, come fin qui problematizzato, è molto controverso il dibattito intorno alla natura del rapporto che le componenti di elaborazione del numero hanno con quelle di elaborazione verbale, va evidenziato che soprattutto negli ultimi anni alcuni studi hanno cercato di analizzare e di differenziare le caratteristiche delle strutture cognitive preposte all'elaborazione di numeri e linguaggio.

Dati sperimentali, relativi alle abilità numeriche non verbali di neonati ed animali (come ratti o piccioni), hanno portato infatti alla formulazione dell'ipotesi che l'elaborazione del numero possa essere ricondotta non solo ed esclusivamente ad operazioni di processazione linguistico/simbolica, ma anche ad operazioni di quantificazione, cioè ad operazioni cognitive mediate dall'attivazione di una rappresentazione mentale della quantità numerica di tipo analogico, non verbale (Dehaene, 1992). In particolare i processi di quantificazione si basano su competenze che, più da abilità di conteggio vero e proprio, dipendono da altre abilità specifiche: il *subitizing* e la stima di grandezze.

Per spiegare di cosa si tratti Gallistel e Gelman (1992) hanno usato come esempio una delle nostre esperienze più comuni di *subitizing*: molte volte ci sarà infatti capitato, dato un insieme di n elementi, di riconoscerne la quantità presente, senza ricorrere a veri e propri meccanismi di conteggio verbale. Tale processo di quantificazione è efficiente solo nei casi di piccole numerosità (4-6 elementi nei soggetti adulti), ed è caratterizzato da risposte veloci ed accurate. Il limite dell'imprecisione nella risposta aumenta progressivamente con l'ammontare della numerosità dell'insieme contato (Kaufman, Lord, Reese e Volkman, 1994). In particolare, sembra che per le numerosità più grandi, nel nostro sistema di elaborazione del numero entri in gioco un meccanismo parallelo a quello del *subitizing*, identificato più propriamente in meccanismi di «stima» di grandezze. Il termine «stima» fa infatti riferimento al processo di riconoscimento di quantità maggiori di 6-7 elementi. Tale meccanismo è però caratterizzato da minor accuratezza delle risposte stesse.

In sintesi, sebbene tutt'oggi la discussione inerente alla natura di tali processi di quantificazione non verbale rimanga una questione piuttosto controversa in letteratura (si vedano Ginsburg, 1977; Mandler e Shebo, 1982; Meck e Church, 1983; Gallistel e Gelman, 1992; Kaufman *et al.*, 1994; Simon, 1997) i dati sperimentali delle diverse ricerche sembrano suggerire l'esistenza di diversi processi di comprensione e rappresentazione mentale della numerosità, comprensione non necessariamente mediata da codici verbali.

Dal punto di vista evolutivo diventa allora cruciale capire come tali processi si sviluppino e si articolino fino a consentirci la piena competenza nella comprensione di numeri e quantità.

LO SVILUPPO DELLA CONOSCENZA NUMERICA PREVERBALE

Come evidenziato fin dall'inizio di questa rassegna, le principali questioni che le ricerche sullo sviluppo della conoscenza numerica preverbale si sono poste, e continuano a porsi, possono sintetizzarsi in una questione generale: come compare e si sviluppa la capacità di riconoscere le quantità relative ad eventi e fenomeni?

Secondo diversi studi, sia gli animali che i neonati sono capaci di riconoscere le quantità numeriche, o meglio ancora, sanno discriminare tra differenti serie di elementi in base alla loro numerosità (si vedano Thomas e Chase, 1980; Washburn e Rumbaugh, 1991).

Riguardo alla conoscenza numerica degli animali, Meck e Church (1983) hanno dimostrato che i topi possono discriminare le quantità sulla base del numero di elementi in un insieme di stimoli o della durata della sequenza degli elementi. I ratti sono in grado di apprendere il numero esatto di pressioni di una leva A che è necessario compiere, prima di premere una seconda leva B, così da ottenere una ricompensa. Gli scimpanzé, gli animali più simili all'uomo per eccellenza, sono in grado di compiere semplici operazioni di transcodifica dal sistema di notazione arabo a quello pittografico e sono capaci di individuare il numero arabo corrispondente ad una certa numerosità. Gli studi di Rumbaugh, Savage e Hegel (1987) mostrano inoltre che gli scimpanzé possono addizionare due numerosità $A + B$, altre due numerosità $C + D$, e confrontarle scegliendo la più grande tra esse. L'addizione svolta è però solo approssimata, tanto è vero che se le somme sono vicine l'una all'altra gli scimpanzé hanno più difficoltà a scegliere la più grande. Le ricerche di Thomas e Chase (1980), Washburn e Rumbaugh (1991) dimostrano al riguardo che il confronto numerico può essere insegnato agli animali, e che la discriminazione è più facile quando la distanza tra le due numerosità è maggiore.

Tali evidenze hanno portato Gallistel e Gelman (1992) ad ipotizzare che le basi stesse della competenza numerica umana si possano trovare nei meccanismi preverbali per il calcolo e nel ragionamento aritmetico che la specie umana condivide con altre specie animali.

Venti anni or sono Gelman (1977) mostrava come bambini di due anni e mezzo sapessero compiere delle induzioni su piccole quantità (due o tre elementi) e discriminare disegni a seconda rappresentassero due o tre oggetti (e in determinate condizioni anche disegni di tre e di quattro oggetti). Utilizzando il paradigma sperimentale dell'abi-

tuazione, Strauss e Curtis (1981), hanno dimostrato che bambini di 10-12 mesi erano in grado di evidenziare la variazione di quantità ($N - 1$ oppure $N + 1$) di insiemi di 3 o 4 elementi che in fase di abituazione venivano presentati variando tipo di elementi (cani, case ecc.), posizione e dimensione. Antell e Keating (1983) hanno confermato come addirittura neonati da 1 a 12 giorni di vita, riescano a differenziare insiemi di 2 e 3. Più recentemente, sempre utilizzando la tecnica dell'abituazione, Xu e Spelke (2000) sono riusciti ad evidenziare che bambini di 5-6 mesi sono in grado di distinguere tra insiemi di 8 e di 16 elementi.

Wynn (1992a), presentando prima un pupazzetto che veniva nascosto da uno schermo e poi un altro che veniva aggiunto dietro lo schermo stesso, ha inoltre evidenziato che bimbi di 5 mesi variavano i tempi di fissazione quando, all'abbassarsi dello schermo, vedevano un solo pupazzetto, dimostrando di saper compiere operazioni additive.

Ricostruendo il filo di tali evidenze sperimentali, sembra dunque lecito ipotizzare l'esistenza di una competenza numerica non verbale mediata da una rappresentazione mentale della quantità.

LO SVILUPPO DELLE ABILITÀ DI CONTEGGIO

Capire come si evolvano le abilità di conteggio, implica spiegare in che modo compaia la capacità di codificare le quantità attraverso il sistema verbale dei numeri, e in che modo essa si sviluppi fino a permettere la piena competenza dei meccanismi della conta.

Secondo Wynn (1992b, 1999) il passaggio dalle competenze preverbalì alla vera e propria capacità di contare richiede di mettere in relazione i concetti-numero con le parole-numero, deducendo tra molti significati logicamente possibili il significato corretto delle parole-numero. D'altra parte acquisire il significato corretto delle parole-numero risulta un compito difficile proprio perché tali parole non si riferiscono a significati univoci ma a proprietà di insiemi di elementi.

In particolare relativamente al passaggio dalle competenze preverbalì all'acquisizione delle parole-numero nella letteratura sono presenti almeno due distinte visioni teoriche: la teoria dei principi di conteggio e la teoria dei contesti diversi.

La teoria dei principi di conteggio

Alla base della teoria dei principi di conteggio (Gelman e Gallistel, 1978) sta la convinzione secondo cui i bambini piccoli possiedono un

concetto innato di numero, concetto che si evolve nell'acquisizione delle procedure di calcolo, attraverso alcuni principi:

a) il principio della corrispondenza uno a uno (ogni elemento dell'insieme contato deve corrispondere a una sola parola-numero);

b) il principio dell'ordine stabile (le parole-numero devono essere ordinate in una sequenza fissa che riproduce gli elementi che devono essere contati);

c) il principio della cardinalità (l'ultima parola-numero usata in un conteggio rappresenta la numerosità degli elementi contati).

Le parole-numero che i bambini apprendono dal linguaggio vengono sistemate sulla loro lista innata di «etichette-numero mentali»: uno, due, tre, ..., quindici, ...cinquanta..., cento...

La competenza numerica non verbale ha un ruolo fondamentale nello sviluppo della competenza verbale fornendole la base dei principi impliciti che guidano l'acquisizione dell'abilità di conteggio verbale. D'altra parte, secondo Gallistel e Gelman (1992), il ruolo di schema di riferimento svolto dal meccanismo non verbale, sarebbe reso possibile dall'isomorfismo e dalla similarità della struttura formale delle grandezze non verbali e delle parole-numero. Le due forme di rappresentazione sarebbero distinte, ma al tempo stesso interrelate. Imparando a contare si formerebbe cioè una «mappatura bidirezionale» tra le grandezze non-verbali (che rappresentano la numerosità) e le parole-numero. È tale mappatura bidirezionale a consentire l'uso, e la specificità, sia dei meccanismi analogici di quantificazione non verbale, sia dei meccanismi verbali di conteggio.

D'altra parte, se il saper passare dall'uno all'altro tipo di meccanismi non ne esclude la specificità, non ne esclude neppure la reciproca relazione. Anzi la determina proprio grazie agli stessi processi di sviluppo. Secondo Gallistel e Gelman, infatti, se inizialmente in termini evolutivi i neonati dimostrano di possedere competenze innate di riconoscimento non verbale delle quantità, è proprio quella stessa spinta impressa dallo sviluppo a permettere ai bambini di giungere a padroneggiare le competenze ben più complesse alla base dei meccanismi del conteggio verbale.

La teoria dei contesti diversi

L'ipotesi relativa allo sviluppo delle abilità di conteggio proposto da Fuson (1991) si differenzia da quella di Gelman e Gallistel per il valore considerevolmente minore attribuito alle strutture innate della conoscenza. L'autrice non riconosce la primarietà alle competenze innate rispetto a quelle apprese, bensì una costante interazione tra le due.

Secondo la teoria dei contesti diversi infatti (Fuson e Hall, 1983; Fuson, 1988) i principi di conteggio e di calcolo, pur rispondendo a funzioni strutturali specifiche ed innate, sono progressivamente sviluppati attraverso ripetuti esercizi e per imitazione.

Come Gelman e Gallistel, Fuson riscontra la presenza dei principi della conta, di associazione uno a uno e di ordine stabile (che lei definisce non come principi, bensì come «competenze concettuali»), ma è convinta che siano indispensabili ripetuti momenti di apprendimento e quindi molto tempo, prima che questi principi vengano utilizzati in modo corretto e competente.

In particolare cruciale per la costruzione della conoscenza numerica è l'interazione con l'ambiente. Sebbene infatti i semanti dei numeri siano sempre gli stessi, le situazioni in cui essi sono utilizzati sono molto diverse e possono determinare differenze nei significati e nell'uso dei numeri. Per esemplificare come si manifesti tale complessità di usi e significati può essere utile riportare alcune risposte di bambini italiani ad alcune domande tratte dalle ricerche in questione: «Cosa sono i numeri? A cosa servono i numeri, secondo te?» (Lucangeli, 1999):

M. (4 anni e 8 mesi): *Scritte un po' diverse, non sono lunghe lunghe come le parole.*

L. (5 anni): *Sono che ti servono quando hai i soldini o le bambole. Se ne hai di più o di meno delle tue amichette.*

T. (5 anni): *Sono numeri scritti o detti a voce. O anche sulle dita, uno per uno, ci si conta.*

R. (5 anni e 2 mesi): *I numeri sono fatti per dire uno due tre, e poi non sbagliare fino a dieci o fino a dove sai tu.*

S. (5 anni e 2 mesi): *I numeri piccoli servono a contare, i numeri grandi a scrivere a scuola.*

D. (5 anni): *I grandi ci fanno molte cose. Di più che i bambini. Infatti ci fanno anche la spesa.*

Come risulta evidente anche dalla lettura dei protocolli riportati, i bambini riconoscono diversi aspetti implicati nel numero: aspetti lessicali (i numeri si scrivono, si dicono, ecc.), aspetti semantici relativi alle quantità che essi contraddistinguono, e aspetti funzionali di calcolo e conteggio (i numeri servono a...).

Da un punto di vista evolutivo, secondo Fuson, l'integrazione di tali aspetti e dei diversi significati che i numeri acquistano nella serie numerica viene raggiunta quando il bambino in primo luogo riconosce che ogni parola-numero si riferisce al totale delle unità che la precedono compresa se stessa e, in secondo luogo, comprende che la posizione di qualsiasi unità nella serie numerica assume il valore «più uno» in relazione all'unità precedente e «meno uno» in relazione alla successiva.

In particolare l'acquisizione della conta comprende tre concetti numerici e la loro integrazione: *a)* il padroneggiamento della sequenza numerica; *b)* la corrispondenza uno a uno tra le parole numero e gli elementi contati; *c)* il valore cardinale dei numeri. Nell'acquisizione della sequenza numerica il bambino è coinvolto nella differenziazione delle parole che indicano numeri e nell'apprendimento del loro ordine in sequenza. L'uso competente di questi concetti inizia all'età di 3, 4 anni e procede con l'acquisizione, per intervalli, di parole numero fino agli 8, 9 anni (in un primo periodo la sequenza corretta è fino alla parola 10, poi 20, 70, 100 nei periodi successivi).

L'acquisizione della corrispondenza termine a termine tra parole-numero ed elementi di un insieme è spesso accompagnata da alcune tipologie caratteristiche di errori. Vi sono gli errori «parola-indicazione», in cui il bambino indica un oggetto senza pronunciare la parola-numero, oppure indica pronunciando più parole numero, e quelli «indicazione-oggetto» in cui il conteggio e l'indicazione sono coordinati, ma è quest'ultima ad essere imprecisa (il bambino mentre indica gli oggetti ne salta uno oppure ne indica uno più volte). Ci sono bambini che violano entrambe le corrispondenze citate, indicando più volte lo stesso oggetto senza pronunciare nessuna parola numero, oppure indicano genericamente l'insieme di oggetti pronunciando velocemente le parole-numero. Errori più generali sono invece quelli in cui il bambino, una volta terminata la conta, ricomincia ad indicare gli oggetti della collezione già contati. Le diverse tipologie di errori riscontrate dimostrano che i bambini più piccoli possono incontrare difficoltà nell'integrazione dell'indicazione e del conteggio vero e proprio.

Da un punto di vista educativo, il grado di attenzione che il bambino dedica al compito, le caratteristiche e la disposizione degli oggetti da contare, possono influenzare la produzione di una conta corretta.

Riguardo alla cardinalità del numero, secondo Fuson, occorre aspettare che il bambino abbia 4 anni circa perché sappia riconoscere il valore cardinale delle parole-numero pronunciate. Prima di tale periodo è probabile infatti che quando gli viene chiesto di indicare il numero di oggetti in un insieme egli risponda con l'ultima parola della conta a cui è arrivato, senza comprendere che l'ultimo numerale contato si riferisce alla cardinalità dell'insieme stesso.

In sintesi, seguendo il modello della Fuson, la costruzione dei concetti numerici di sequenza, di conta, di valore cardinale, e le forme di integrazione tra questi, possono essere descritte attraverso almeno cinque distinti livelli evolutivi. A tali livelli corrispondono specifiche strutture numeriche concettuali dei diversi significati delle parole-numero e della loro progressiva integrazione.

L'evoluzione può identificarsi nelle seguenti fasi (a ciascuna viene

affiancato un esempio di risposte fornite da bambini italiani nell'indagine svolta da Lucangeli, 1999):

a) la sequenza di numeri è usata come stringa di parole

(i.e: *Luca 4 anni: uno, due, sette, quattro, cinque, tre, venti...*);

b) si distinguono le parole-numero, ma l'intera sequenza è unidirezionale, in avanti, e viene prodotta a partire dall'uno

(i.e: *Alberto 4 anni e 6 mesi: uno, due, tre, quattro, cinque e poi non so bene bene*);

c) la sequenza è producibile a partire da un numero qualsiasi della serie stessa governata dalle relazioni numeriche di subito, prima, dopo, ecc.;

(i.e: *Sara 5 anni: subito vicino a 5 c'è 6 e poi sette e otto e poi fino a venti te li dico tutti giusti*);

d) le parole-numero della sequenza sono trattate come entità distinte che non devono più ricorrere a elementi concreti di corrispondenza biunivoca;

(i.e: *Lucia 5 anni e 3 mesi: quattro è più di tre. Cinque è di più di quattro*);

e) la sequenza è usata come catena bidirezionale, sulla quale ed attraverso la quale operare in distinti modi;

(i.e: *Mattia 6 anni e 5 mesi: sette, otto, nove, dieci.....venti, diciannove, diciotto...*).

Tale evoluzione non è da considerarsi rigida o precostituita, ma esemplificativa della continua interazione tra competenze cognitive e apprendimenti significativi (per una sintesi del modello si veda Livera Sempio, 1997).

Al modello dei «Contesti diversi», si ispirano anche le ricerche di Steffe, Cobb e von Glasersfeld (1988). In particolare, il modello di sviluppo delle abilità della conta numerica, da loro proposto, analizza i cambiamenti qualitativi nei sistemi di conteggio nelle diverse età.

Steffe (1991) ritiene che il concetto di numero sia definibile come un prodotto dell'interiorizzazione e reinteriorizzazione dei concetti di oggetto e dell'abilità di conta. I cinque stadi di sviluppo, identificati, dalle loro ricerche, sarebbero caratterizzati da differenze qualitative sia nei tipi di conta usati dai bambini, sia nello sviluppo delle strutture concettuali relative alla conta stessa:

– *Stadio dello schema di conta percettivo*. Il processo di conta percettivo si compone di tre capacità, quella di riconoscere una collezione percettiva, quella di produrre una serie numerica e infine di coordinarle insieme;

– *Stadio dello schema di conta figurativo*. In questo stadio il materiale percettivo non è più indispensabile al bambino. Vi è ancora però la ricerca di qualcosa che può essere contato, come i movimenti delle dita o l'enunciazione delle parole-numero. I tipi di conta coinvolti in

questo stadio sono quelli degli item motori e verbali. I bambini sollevano uno a uno le dita in sintonia con le parole-numero enunciate e, non simultaneamente, come nello stadio precedente;

– *Stadio della serie iniziale dei numeri.* Il bambino comprende il valore astratto delle unità. La parola numero è considerata un'unità che include in se stessa l'attività del contare, la quale comprende tutte le unità che la precedono inclusa se stessa;

– *Stadio della serie dei numeri con relazioni implicite di inclusione.* Il bambino è capace di ricostruire i concetti di «unità di unità» e «unità composite». La parola-numero «cinque» comprende le parole da 1 a 5 e nello stesso tempo è compresa nella parola numero «nove». Quindi il concetto di unità comprende sia quello di «tutto» che di parte;

– *Stadio della serie dei numeri con relazioni esplicite di inclusione.* In questo stadio le unità si riferiscono ad un concetto di ripetibilità. La serie numerica è formata da unità equivalenti «iterate e incluse». Ad esempio il numero cinque può essere considerato sia un'unità ripetuta cinque volte, sia una delle parole numero della conta.

Continuando dunque a seguire l'obiettivo di tessere il filo delle principali ipotesi inerenti allo sviluppo della conoscenza numerica, è necessario affrontare almeno un'altra questione di fondo: saper contare verbalmente, implica anche saper riconoscere e usare con competenza «la lingua dei numeri» e i suoi sistemi simbolici?

LO SVILUPPO DELLA CAPACITÀ DI SCRITTURA E DI LETTURA DEI NUMERI

Nella letteratura psicologica le ricerche che si sono occupate più propriamente di capire come compaia e si sviluppi la capacità di utilizzare il sistema simbolico dei numeri arabi si sono orientate a due linee di indagine relative allo sviluppo delle abilità di scrittura del numero e allo sviluppo delle abilità di lettura.

Riguardo allo sviluppo delle abilità di scrittura, esistono diverse ricerche che hanno tentato di evidenziare l'evoluzione di tale competenza fin dalle prime fasi dell'apprendimento (Sastre e Moreno, 1976; Hughes, 1982, 1987; Sinclair, Mello e Siegrist, 1988; Sinclair e De Zwarth, 1989; Bialystok, 1992; Agli e Martini, 1995). Si tratta di studi che affrontano il problema della notazione numerica nel bambino in età prescolare adottando per lo più un approccio costruttivista dello sviluppo cognitivo. Liverta Sempio (1997) ha evidenziato al riguardo che sebbene sul piano empirico i risultati raggiunti da tali studi presentino ampie convergenze, sul piano teorico, a tali convergenze non ne corrispondono altrettante. Manca infatti un'univoca teoria sullo sviluppo della competenza nel numero scritto, e sul

rapporto tra acquisizione grafica e acquisizione concettuale del numero.

In generale i tipi di notazione numerica evidenziati dagli studi menzionati sono riconoscibili in tre classi:

- notazione con grado informativo nullo per un osservatore esterno, ma portatore di significato personale per il bambino;
- notazione basata sulla corrispondenza biunivoca;
- notazione convenzionale.

Tali classi di notazione si caratterizzano anche per il tipo di formato grafico espressivo che tendono a privilegiare. Gli studi di Hughes (1982, 1987) sono particolarmente utili per illustrare tale variabilità espressiva, esemplificata dall'autore in quattro categorie di rappresentazione sovrapponibili a quelle da noi evidenziate:

- idiosincratica, cioè priva di notazioni comprensibili;
- pittografica, che riproduce cioè figurativamente gli oggetti della collezione;
- iconica, formata cioè da segni grafici, ad esempio aste e simboli, posti in corrispondenza biunivoca con gli oggetti;
- simbolica, cioè costituita dai numeri arabi veri e propri.

Nella figura 3 sono riportati alcuni esempi per ciascuna delle tipologie di notazione descritte.

Evolutivamente, si è osservato che mentre bambini di tre anni e mezzo e di quattro anni usano molti segni sia idiosincratici che pittografici, dai quattro ai quattro anni e mezzo i bambini usano prevalentemente segni iconici (simboli e lettere) e cominciano a usare simboli arabi. Questi ultimi sono usati con familiarità dai bambini di cinque anni, e a cinque anni e mezzo la maggior parte dei bambini usa il simbolo arabo corrispondente alla quantità esatta (entro il 9). Errori di scrittura frequenti in quest'ultimo caso si sono verificati essere la specularità e le rotazioni nell'uso degli arabi stessi.

Altrettanto complesso sembra il percorso di sviluppo delle capacità di lettura dei numeri arabi. Senza entrare infatti nello specifico dei meccanismi cognitivi di natura lessicale e sintattica alla base della lettura di numeri, in diversi lavori si è messo in luce come nella codifica verbale di un numero ciascuna cifra, a seconda della sua posizione, assuma un «nome» diverso: i meccanismi lessicali hanno il compito di selezionare adeguatamente questi nomi per riconoscere quello in esame.

I numeri primitivi appartengono a tre classi distinte, chiamate «ordini di grandezza» o «livelli»: *a*) le unità; *b*) i «teens», che contengono la sottocategoria dei «dici» (11, 12, 13, ...); *c*) le decine (21, 22...31, ...41, ...). Ogni elemento è caratterizzato, oltre che dalla classe cui appartiene, dalla posizione occupata nella classe stessa. Per esempio: il cinque possiede la quinta posizione nel livello delle unità; il quindici,

Informazione nulla (continua o discreta)

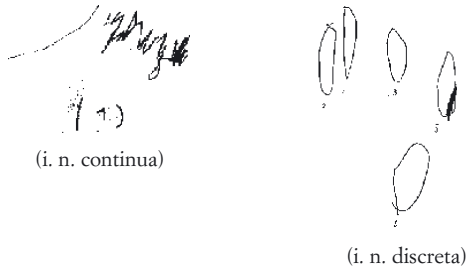


FIG. 3. Esempi di tipologie di notazione numerica in bambini dai 3 ai 5 anni.

la quinta posizione in quello dei «teens», il quaranta la quarta posizione in quello delle decine. Gli errori a livello di lessico numerico sono quelli che riguardano la produzione delle singole cifre, senza coinvolgere il loro posto all'interno del numero.

Sono lessicali errori del tipo:

4/7 (leggo, o mi rappresento mentalmente, scrivo o dico ad alta voce «sette» invece di «quattro»).

D'altra parte, poiché ogni cifra nel comporre un numero (ad esempio le cifre 1, 9 e 7 nel comporre centonovantasette) è caratterizzata da una relazione spaziale particolare con le altre cifre costituenti un numero, relazione elaborata dai meccanismi sintattici relativi al valore posizionale delle cifre (Seron e Fayol, 1994; Power e Dal Martello, 1990, 1997), errori di lettura di numeri possono essere dovuti a difficoltà nel riconoscimento delle posizioni e dunque della sintassi interna al numero stesso. Errori di lettura a base sintattica sono ad esempio i seguenti (cfr. Lucangeli, 1999):

574 → «cinquesettequattro»

20057 → «duecentocinquantasette».

In sintesi, si tratta di tutti quegli errori di transcodificazione tra i diversi codici arabico-verbale e viceversa.

È interessante sottolineare come questa transcodifica possa essere facilitata dalla maggiore o minore trasparenza tra codice verbale e quantità. Il confronto tra sistemi di numerazione asiatici, cinese, giapponese, coreano ed europei (Miura, Okamoto, Kim, Chang, Steere e Fayol, 1994; Miller, Smith, Zhu e Zhang, 1995) ha evidenziato una facilitazione di quelli asiatici nella comprensione e costruzione dei numeri, in particolare quelli da 11 a 20, in quanto mantengono in modo più esplicito il riferimento alla base 10, undici diventa dieci-uno, dodici, dieci-due. Questo riferimento è presente anche per altri numeri, ad esempio 432, diventa 4 cento, 3 dieci, due.

Alcune ricerche, seppure da prospettive differenti, hanno tentato di identificare le principali fasi evolutive, senza però giungere a proposte univoche o generalizzabili (per una sintesi si veda Liverta Sempio, 1997). L'unica ipotesi per lo più condivisa nelle diverse prospettive di indagine, è l'ipotesi di fondo secondo la quale il riconoscimento del numero scritto procederebbe per fasi successive e complementari, implicando un'interdipendenza tra la capacità di leggere i numeri e di riconoscerne il corrispondente semante quantitativo (Bialystock, 1992; Loudon e Hunter, 1999).

Le due linee principali seguite dalle ricerche si riferiscono allo studio dello sviluppo della capacità di riconoscere i numeri scritti, e allo studio dello sviluppo della capacità di comprensione simbolica vera e propria.

Riguardo allo sviluppo della capacità di riconoscere i numeri scritti, le ricerche di Pontecorvo (1985) hanno identificato diverse fasi evolutive: dall'identificazione errata, all'identificazione soltanto di alcuni numeri, i più semplici e noti, fino all'identificazione del numero corretto accompagnata dalla rappresentazione esatta della quantità corrispondente.

Come evidenzia Liverta Sempio (1997), se Pontecorvo si è occupata del riconoscimento dei numeri scritti, Bialystock (1992) ha studiato prevalentemente lo sviluppo della comprensione simbolica. In particolare secondo Bialystock la comprensione simbolica di numeri e lettere implica diverse tipologie di relazione: quelle tra sistemi orali e scritti, e quelle tra tali sistemi e i semanti corrispondenti. La comprensione simbolica dei numeri dovrebbe perciò permettere di integrare le rappresentazioni dei numeri stessi in maniera che al numero che si dice «tre» corrisponda la scrittura araba 3 e il suo semante quantitativo. Lo sviluppo di tale comprensione segue, secondo Bialystock, almeno tre stadi:

– l'apprendimento delle notazioni orali dei numeri. I bambini recitano la sequenza appresa ma non ne sanno distinguere uno ad uno gli elementi sia nella scrittura che nel semante corrispondente;

- la rappresentazione formale in cui risultano integrate la capacità di riconoscere il nome verbale e la scrittura corrispondente al numero;
- la rappresentazione simbolica in cui la rappresentazione formale (nome e scrittura del numero) è integrata al riconoscimento della quantità corrispondente.

Ricostruendo dunque il filo delle diverse ricerche sullo sviluppo della capacità numerica risulta chiaro che tutti i meccanismi di calcolo e manipolazione del sistema numerico possono avere origine solo quando l'evoluzione dei meccanismi di riconoscimento preverbale delle quantità si sia evoluta ed integrata con gli apprendimenti relativi ai sistemi di conteggio, lettura e scrittura dei numeri elementari.

CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

Per giungere a considerazioni finali capaci di ricondurre a sintesi l'articolato panorama di ipotesi presenti nella letteratura, è necessario tornare alla domanda cruciale da cui hanno preso le mosse le riflessioni presenti in questo studio: come giungono i bambini a riconoscere le quantità, a rappresentarle e a manipolarle attraverso un sistema simbolico complesso quale quello dei numeri?

Nel cercare risposte a tale domanda le ricerche sembrano essersi focalizzate su diverse questioni.

La prima e più generale questione tenta di capire il delicato rapporto tra lo sviluppo della conoscenza numerica e quello delle altre abilità cognitive di base, linguaggio in particolare.

In questo caso le ricerche si sono rivolte principalmente sia allo studio della relazione tra conoscenza numerica e funzioni intellettive generali (modello piagetiano), sia allo studio della maggiore o minore interdipendenza tra i sistemi cognitivi preposti all'elaborazione della conoscenza numerica e quelli preposti all'elaborazione del linguaggio.

È soprattutto intorno a quest'ultimo aspetto, e alla specificità dei processi di quantificazione non verbale, che si sono concentrate le ipotesi relative all'origine stessa della conoscenza numerica. Origine che le evidenze sperimentali apportate dagli studi su neonati, oltre che su alcune specie animali, individuano proprio in processi di discriminazione e riconoscimento non verbale della quantità.

Se dunque senza saper contare, o meglio prima di saper contare la specie umana sa capire i fenomeni anche in termini di quantità, ciò fa supporre che lo sviluppo della conoscenza numerica dipenda da principi cognitivi innati (cfr. Teoria dei Principi di Conteggio).

Anche riguardo a tale questione la letteratura non permette una risposta unitaria. Le prospettive possibili sono almeno due: quella della Teoria dei Principi di Conteggio, secondo la quale è la spinta evoluti-

va stessa a consentire sia l'origine che l'evoluzione completa della conoscenza numerica, e quella della Teoria dei Contesti Diversi, secondo la quale sviluppo e apprendimento sono binomio inscindibile, necessario in entrambi i suoi termini. La spinta evolutiva, proprio in virtù della sua stessa natura strutturalmente legata ai processi di apprendimento, integrerebbe principi innati e principi appresi, conoscenze quantitative e conoscenze verbali, sistemi di rappresentazione cognitiva e sistemi di rappresentazione simbolica. Da tale integrazione dipenderebbero così sia la competenza nei meccanismi di conteggio, sia la capacità di usare il linguaggio simbolico del sistema numerico verbale e scritto.

Per quanto riguarda lo sviluppo delle capacità di lettura e scrittura dei numeri, pur da diverse prospettive, emerge che saper usare il sistema simbolico dei numeri implica non soltanto saper capire i fenomeni in termini di quantità e saperli manipolare attraverso meccanismi di conteggio, ma significa saper trasformare tali processi in segni e linguaggi, regolati al proprio interno da grammatiche specifiche. Leggere e scrivere numeri è diverso da saper contare con competenza, implica funzioni di sviluppo e apprendimento ulteriori, che non si esauriscono e che a propria volta non esauriscono il saper contare.

Continuando dunque a porsi la prospettiva dell'evoluzione, ciascun bambino che debba servirsi della propria conoscenza numerica per apprendere i complessi meccanismi del calcolo, con i numeri deve saper avere a che fare a tutti i livelli: riconoscerne i semanti quantitativi, operarvi tutti i processi di conteggio necessari, e saperli adoperare nel codice del loro linguaggio scritto e orale. Così, quando intorno ai sei anni la scuola gli chiederà di imparare a fare le prime operazioni di calcolo, convinta di fargli cominciare da lì il lungo percorso di sviluppo e apprendimento della propria intelligenza numerica, in realtà prenderà un abbaglio. Ciascun bambino avrà cominciato ad intellighere il mondo attraverso i numeri molto, molto prima.

BIBLIOGRAFIA

- AGLI F., MARTINI A. (1995). Rappresentazione e notazione della quantità in età prescolare. *Età Evolutiva*, 51, 30-44.
- ANELL S., KEATING D.P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development*, 54, 695-710.
- BIALYSTOCK E. (1992). Symbolic representation of letters and numbers. *Cognitive Development*, 7, 301-316.
- BUTTERWORTH B. (1999). *The mathematical brain*. London: Macmillan (trad. it. *L'intelligenza matematica*. Milano: Rizzoli).
- CASE R., OKAMOTO Y. (1996). The role of central conceptual structures in the development of children's thought. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 61 (1-2), v-265.

- CASE R. (2000). Un modello psicologico dello sviluppo del senso del numero. *Età Evolutiva*, 65, 5-9.
- COLLIGNON R., LECLERCQ C., MAHY J. (1977). Etude de la séméiologie des troubles du calcul au cours de lésions corticales. *Acta Neurologica Belgica*, 77, 257-75.
- DEHAENE S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44, 1-42.
- FUSON K.C. (1988). *Children counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag.
- FUSON K.C. (1991). Relations entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans. In *Les chemins du nombre*, eds. J. Bideaud, C. Meljac, J.P. Fischer (Lille: Presses Universitaires de Lille).
- FUSON K.C., HALL J.W. (1983). The acquisition of early number word meaning: A conceptual analysis and review. In *The development of mathematical thinking*, ed. H.P. Ginsburg (New York: Academic Press).
- GALLISTEL C.R., GELMAN R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, 44, 43-74.
- GELMAN R. (1977). How young children reason about small numbers. In *Cognitive theory*, eds. N.J. Castellan, D.B. Pisoni, G.R. Potts (Hillsdale, N.J.: Erlbaum).
- GELMAN R., GALLISTEL C.R. (1978). *The child understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- GINSBURG H.P. (1977). *Childrens arithmetic: The learning processes*. New York: Van Nostrand.
- GIRELLI L., LUCANGELI D., BUTTERWORTH B. (2000). The development of automaticity in accessing number magnitude. *Journal of Experimental Child Psychology*, 76, 104-122.
- HUGHES M. (1982). Rappresentazione grafica spontanea del numero nei bambini. *Età Evolutiva*, 12, 5-10.
- HUGHES M. (1987). I bambini ed il numero. *Età Evolutiva*, 27, 62-66.
- KAUFMAN E.L., LORD M.W., REESE T.W., VOLKMAN J. (1994). The discrimination of visual number. *American Journal of Psychology*, 62, 498-525.
- LIVERTA SEMPIO O. (1997). *Il bambino e la costruzione del numero*. Roma: La Nuova Italia Scientifica.
- LOUDEN W., HUNTER J. (1999) One hundred children: Baseline assessment of literacy in the early years of education. *Journal of Research in Reading*, 22 (1), 89-94.
- LUCANGELI D. (1999). *Il farsi e disfarsi del numero*. Roma: Borla.
- MANDLER G., SHEBO B.J. (1982). Subitizing: An analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology: General*, 111, 1-22.
- MARKMAN E.M., SIBERT J. (1976). Classes and collections: Internal organization and resulting holistic properties. *Cognitive Psychology*, 8, 561-577.
- MCGARRIGLE J., DONALDSON M. (1975). Conservation accidents. *Cognition*, 3, 341-350.
- MECK W.H., CHURCH R.M. (1983). A mode control model of counting and timing process. *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Process*, 9, 320-334.
- MEHLER J., BEVER T.G. (1978). Cognitive capacity of very young children. *Science*, 158, 151-162.
- MILLER K.F., SMITH C.M., ZHU J., ZHANG H. (1995). Preschool origins of cross-national differences in mathematical competence: The role of number-naming systems. *Psychological Science*, 6, 56-60.
- MIURA I.T., OKAMOTO Y., KIM C.C., CHANG C., STEERE M., FAYOL M. (1994). Comparisons of children's cognitive representation of number:

- China, France, Japan, Korea, Sweden and United States. *International Journal of Behavioral Development*, 17, 401-411.
- PIAGET J., SZEMINSKA A. (1941). *La genese du nombre chez l'enfant*. Neuchâtel-Paris: Delachaux & Niestle (trad. it. *La genesi del numero nel bambino*. Firenze: La Nuova Italia, 1968).
- PONTECORVO C. (1985). Figure, parole, numeri: un problema di simbolizzazione. *Età Evolutiva*, 22, 5-33.
- POWER R., DAL MARTELLO F. (1990). The dictation of Italian numerals. *Language and Cognitive Processes*, 5, 237-254.
- POWER R., DAL MARTELLO F. (1997). From 834 to eighty thirty four: The reading of arabic numerals by seven year old children. *Mathematical Cognition*, 3, 63-85.
- RUMBAUGH D.M., SAVAGE-RUMBAUGH S., HEGEL M.T. (1987). Summation in the chimpanzee (*Pan troglodytes*). *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Process*, 13, 107-115.
- SASTRE G., MORENO M. (1976). Representation graphique de la quantité. *Bulletin de Psychologie*, 30, 346-355.
- SERON X., FAYOL M. (1994). Number transcoding in children: A functional analysis. *British Journal of Developmental Psychology*, 12, 281-300.
- SIEGAL M. (1991a). A clash of conversational worlds: Interpreting cognitive development through communication. In *Perspectives on socially shared cognition*, eds. L.B. Resnick, J.M. Levine, S.D. Teasley (Washington, D.C.: American Psychological Association), pp. 23-40.
- SIEGAL M. (1991b). *Knowing children. Experiments in conversation and cognition*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.
- SIMON T.J. (1997). Reconceptualizing the origins of number knowledge: A non-numerical account. *Cognitive Development*, 12, 349-372.
- SINCLAIR A., MELLO D., SIEGRIST F. (1988). La notation numerique chez l'enfant. In *La production de notations chez le jeune enfant*, ed. H. Sinclair (Paris: Presses Universitaires de France), pp. 71-97.
- SINCLAIR A., DE ZWARTH H. (1989). L'acquisizione della scrittura alfabetica e della notazione matematica. In *Il bambino inventa la scrittura*, a cura di G. Stella, F. Nardocci (Milano: Franco Angeli), pp. 85-101.
- STEFFE L. (1991). Stades d'apprentissage dans la construction de la suite des nombres. In *Les chemins du nombre*, eds. J. Bideaud, C. Meljac, J.P. Fischer (Lille: Presses Universitaires de Lille), pp. 113-132.
- STEFFE L., COBB P., VON GLASERSFELD E. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York: Springer-Verlag.
- STRAUSS M.S., CURTIS L.E. (1981). Infant perception of numerosity. *Child Development*, 52, 1146-1152.
- THOMAS R.K., CHASE L. (1980). Relative numerosness judgments by squirrel monkeys. *Bulletin of the Psychonomic Society*, 16, 79-82.
- VIANELLO R., MARIN M.L. (1997). *OLC Operazioni logiche e conservazione*. Bergamo: Edizioni Junior.
- WASHBURN D.A., RUMBAUGH D.M. (1991). Ordinal judgements of numerical symbols by macaques (*Macaca Mulatta*). *Psychological Science*, 2, 190-193.
- WYNN K. (1992a). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, 358, 749-750.
- WYNN K. (1992b). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, 24, 220-251.
- WYNN K. (1999). Numerical competence in infants. In *The development of mathematical skills. Study in developmental psychology*, ed. C. Donlan (Hove: Psychology Press), pp 3-25.

XU F., SPELKE E.S. (2000). Large numbers discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, 74, B1-B11.

[Ricevuto il 4 aprile 2000]

[Accettato il 10 febbraio 2002]

Summary. This review examines the main hypotheses on the development of numerical knowledge, that is the ability to comprehend phenomena using quantitative knowledge and the complex numerical system. This review analyses general terms of the debate regarding the relationship between numerical knowledge and other cognitive competencies, and specific hypotheses on numerical knowledge acquisition. The three main aspects considered are the development of numerical knowledge, the development of counting competencies, and the development of reading and writing numbers.

La corrispondenza va inviata a Daniela Lucangeli, Dipartimento di Psicologia dello Sviluppo e della Socializzazione, Università di Padova, Via Venezia 8, 35131 Padova, e-mail: daniela.lucangeli@unipd.it