Seminario regionale di studi e diffusione Progetto PP&S *"Innovazione didattica in matematica: PP&S su piattaforma e-learning in ambiente di calcolo evoluto"*

Bologna , 19 dicembre 2013

Donatella Martini ITIS Nullo Baldini Ravenna
d.martini8@virgilio.it

PP&S all’ITIS Baldini

- Inizio dell’esperienza: settembre 2012
- Docenti coinvolti: 2 docenti di matematica
- Classi coinvolte: due terze e due quarte dell’indirizzo Elettrotecnica
- Totale studenti coinvolti: 103

Maple: come utilizzarlo?

Quali problemi risolvere con Maple per poterne sfruttare tutte le potenzialità?

Maple è in grado di

- gestire dati numerici e alfanumerici
- tracciare grafici in 2D e 3D
- eseguire calcoli complessi

↓

STATISTICA

Un problema di regressione

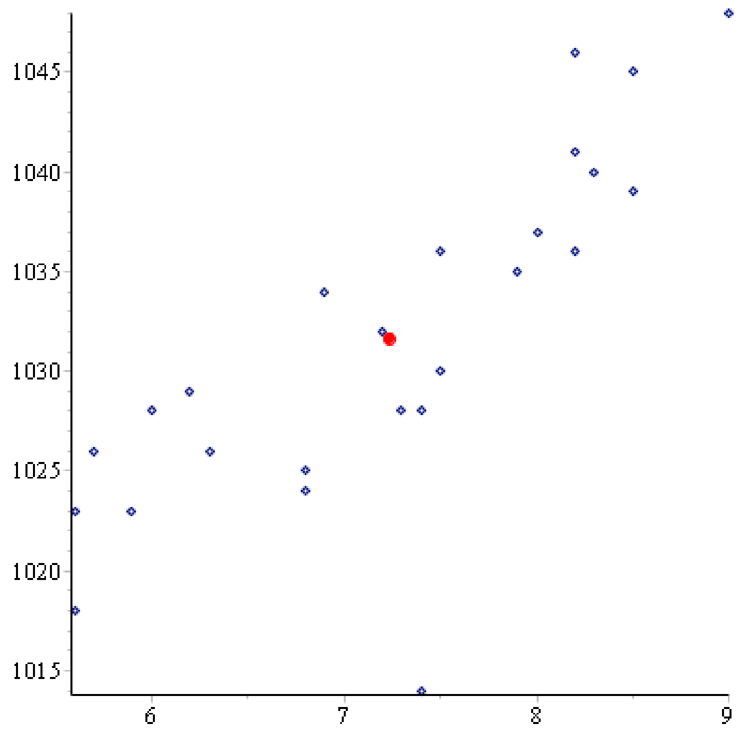
- In un'azienda che non produce in serie, ogni oggetto costruito è un pezzo unico. Il costo di ciascun oggetto dipende da molti fattori tra cui il tempo che si è reso necessario per la realizzazione . L'azienda ha rilevato i tempi (in giorni lavorativi) e i costi (in unità convenzionali di moneta) degli ultimi 25 oggetti prodotti. I dati sono riassunti in tabella:

pezzo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tempo (X)	8.2	7.3	7.5	5.6	7.2	6.8	7.4	8.5	8.3	7.9
Costi (Y)	1046	1028	1030	1018	1032	1025	1028	1045	1040	1035
pezzo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Tempo (X)	5.6	6.3	6.0	7.4	8.2	8.0	6.8	5.9	9.0	7.5
Costi (Y)	1023	1026	1028	1014	1036	1037	1024	1023	1048	1036
pezzo	21	22	23	24	25					
Tempo (X)	5.7	6.2	6.9	8.2	8.5					
Costi (Y)	1026	1029	1034	1041	1039					

- È possibile stabilire una relazione tra queste due variabili ?

Rappresentiamo i dati

plots[*display*](*d1*, *d2*)



Calcoliamo gli indici

Calcoliamone la media:

$M_x := Statistics[Mean](tempi)$

7.23600000000000

$M_y := Statistics[Mean](costi)$

1031.64000000000

Calcoliamo la **covarianza**:

$Statistics[Covariance]((tempi, costi))$

6.75696000000000

e l'**indice di correlazione lineare**.

$Statistics[Correlation](tempi, costi)$

0.795477241785722

… e la retta di regressione

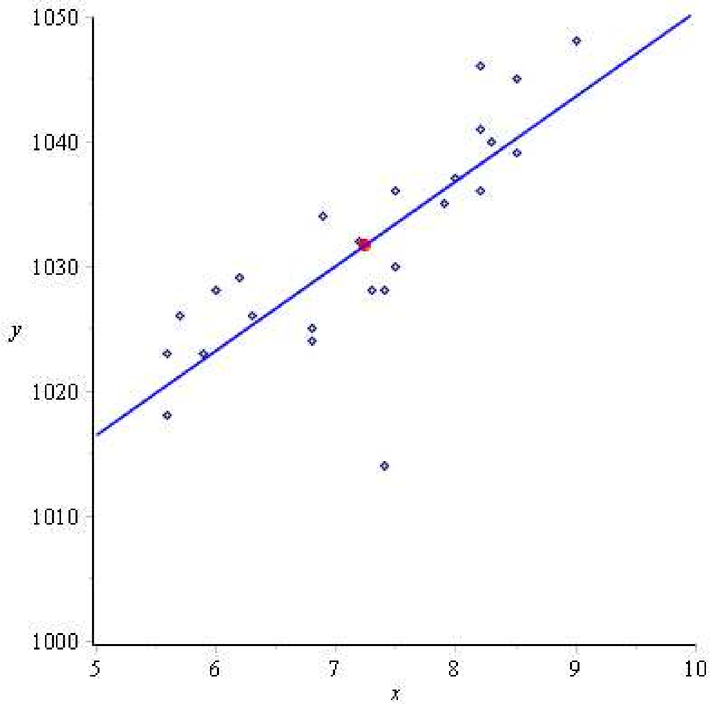
$f := Statistics[LinearFit]([1, x], tempi, costi, x)$

$$982.584952001798 + 6.77930458792178\,x$$

e la inseriamo nel grafico:
$d3 := plot(f(x), x = 5..10, y = 1000..1050, color = blue)$

$$PLOT(...)$$

$plots[display](d1, d2, d3)$



I components

Gli studenti apprendono più facilmente se interagiscono con i file che vengono loro proposti

se ascolto dimentico
se guardo ricordo
se faccio imparo

e Maple offre le

COMPONENTI INTERATTIVE

Con le componenti interattive …

- 5 persone partecipano a una corsa dove vengono assegnate le medaglie d'oro, argento e bronzo. In quanti modi diversi può essere il podio finale? (*prof. Marina Marchisio Università di Torino*)

Soluzione

Proviamo a risolverlo, esaminandone le caratteristiche:

1. quante persone abbiamo in totale?
2. utilizzerò tutte le persone a disposizione?
   si
   no
3. quante persone dobbiamo scegliere per sel… i vincitori?
4. conta l'ordine?
5. posso ripetere gli elementi?

… è possibile correggere i propri errori

- Una disposizione semplice di lunghezza k di elementi di un insieme S di n oggetti, con $k \leq n$, è una **sequenza ordinata** di k elementi di S nella quale **non si possono avere ripetizioni** di uno stesso oggetto. In totale le possibili disposizioni semplici sono:

$$D^{*}_{n,k} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Una disposizione con ripetizione di lunghezza k di elementi di un insieme S di n oggetti, con $k \leq n$, è una **sequenza ordinata** di k elementi di S nella quale **si possono avere ripetizioni** di uno stesso oggetto. In totale le possibili disposizioni con ripetizione sono:

$$D_{n,k} = n^{k}$$

- le permutazioni di n elementi è una **sequenza ordinata** degli n elementi nella quale **non si possono avere ripetizioni** di uno stesso oggetto. In totale le possibili permutazioni sono:

$$D^{*}_{n,n} = n!$$

6. in quale delle tre situazioni ci troviamo? disposizioni_semplici

Controlla le tue risposte | Esatto!!!

Il risultato corretto quindi sarà: 60

Controlla il risultato | Esatto!!!

Grafici 2D e 3D e animazioni

Rappresentazioni in 3D e animazioni

ANTENNE PARABOLICHE

Le vediamo sui tetti delle nostre case, su terrazzi e balconi e non sono esteticamente belle, ma pare che siano ormai indispensabili. Sembra che gli appassionati di televisione non possano proprio farne a meno, perché il segnale è migliore e c'è una più vasta scelta di canali. Con l'antenna parabolica è possibile captare immagini e informazioni provenienti dal mondo intero, con costi assai limitati.
L'antenna parabolica è lo strumento che permette di vedere la tv via satellite. Le frequenze inviate dai satelliti vengono "catturate" e trasformate in segnali che arrivano al televisore.

Possono variare in dimensione, materiale di costruzione, ma la forma è sempre la stessa.

▶ **Perché le antenne hanno questa forma?**

Partiamo da una parabola

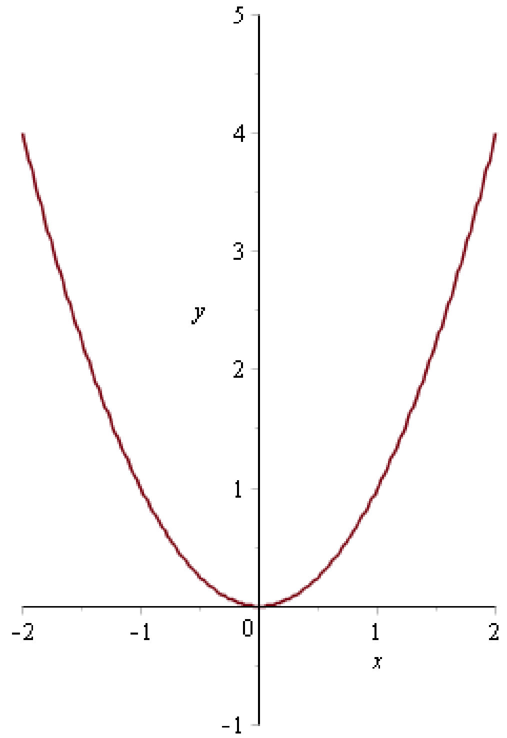
Qual è il grafico di questa funzione?

Il suo grafico è:

restart

with(*plots*) :

plot(x^2, $x = -2 .. 2$, $y = -1 .. 5$, *scaling* = *constrained*)

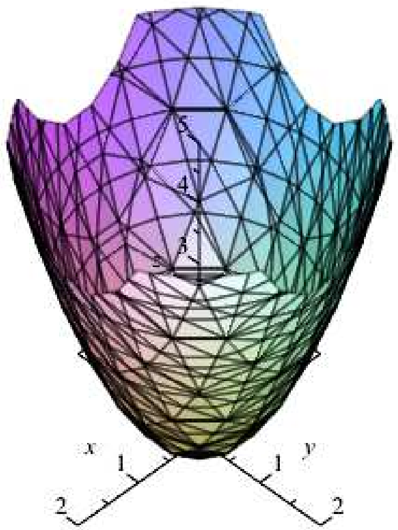


… la facciamo ruotare

… un paraboloide di rotazione

(Per visualizzare meglio la superficie ottenuta, modifica la sua posizione cliccando sul grafico e utilizza l'animazione)

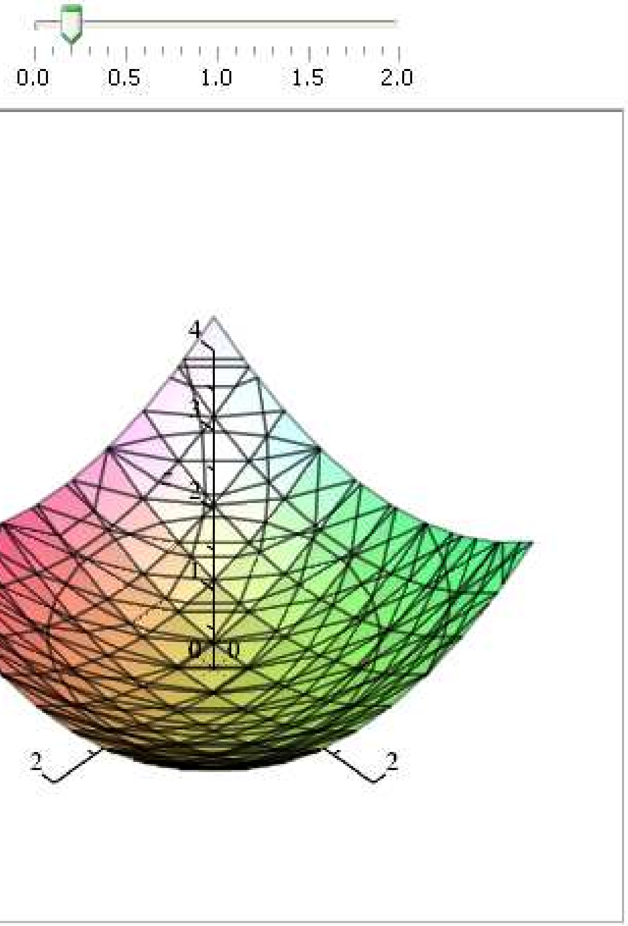
$plots[implicitplot3d]\left(z = x^2 + y^2, x = -2 .. 2, y = -2 .. 2, z = -1 .. 5, axes = normal, \ scaling = constrained, lightmodel = light1, viewpoint = \text{"circleleft"}\right)$



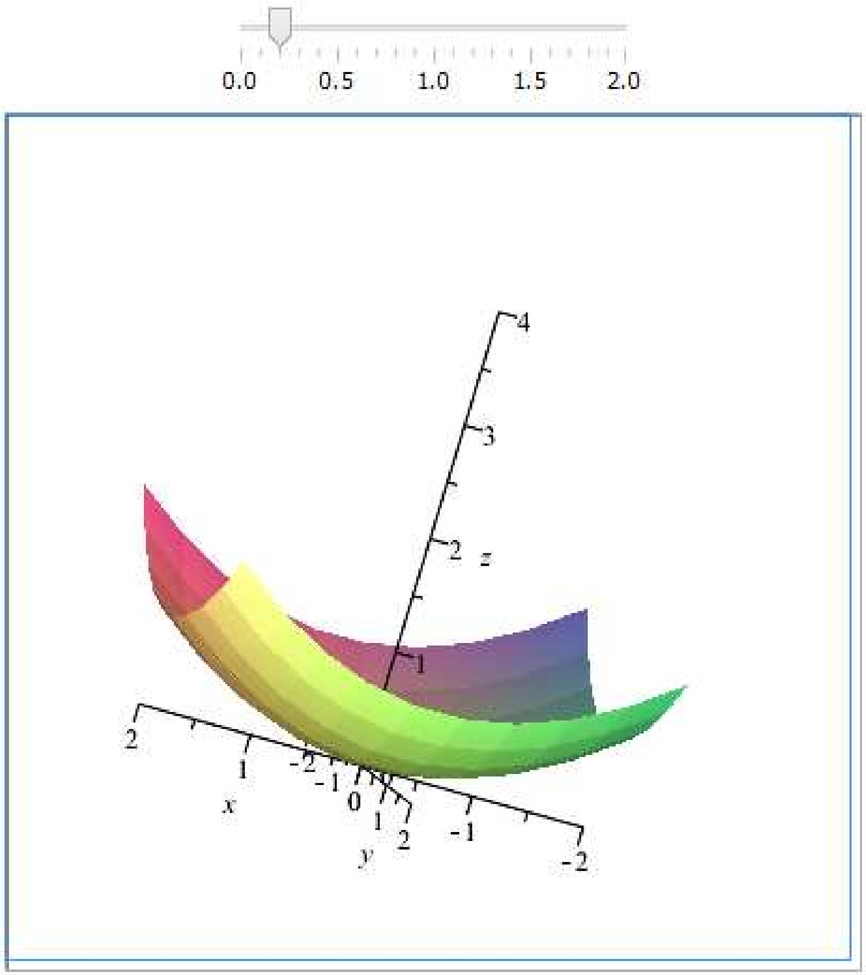
Consideriamo ora la parabola di equazione $y = a \cdot x^2$ e proviamo a variarne la concavità (muovi il cursore per cambiare il valore di a):

… ne variamo la concavità

Ripetiamo la stessa operazione con il paraboloide *(Per visualizzare meglio la superficie ottenuta, modifica la sua posizione cliccando sul grafico e utilizza l'animazione):*



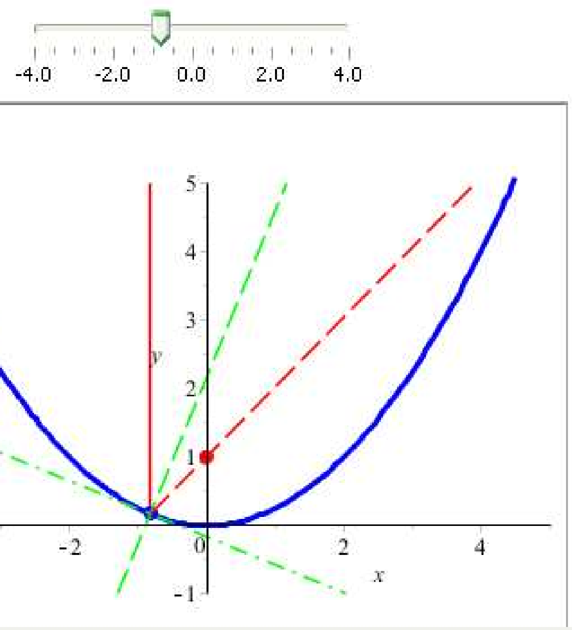
… lo ruotiamo



… con l'aiuto di Maple, dimostriamo la proprietà del fuoco

Proprietà della parabola

Notiamo intanto che le antenne corrispondono a paraboloidi con valore del coefficiente *a* <u>positivo</u> ma <u>piuttosto vicino allo zero.</u>
Prendiamo allora una parabola del tipo indicato con $a = 0.25$.
Immaginiamo che sia uno specchio e che un raggio luminoso, che arriva parallelamente al suo asse di simmetria, la colpisca.
Il raggio verrà riflesso in questo modo:
restart



… e la verifichiamo analiticamente

Verifica analitica

La parabola, utilizzata nell'esempio, ha equazione $y = \frac{1}{4}x^2$.

Prendiamo un suo punto P di generica ascissa k. Le coordinate del punto saranno $\left(k, \frac{1}{4}k^2\right)$.

La retta parallela all'asse y passante per P (**raggio incidente**) avrà equazione $x = k$.
Per calcolare l'equazione della retta t tangente alla parabola possiamo fare riferimento alla derivata prima della funzione o alla condizione di tangenza tra retta e parabola.

La retta tangente appartiene al fascio di rette per P, quindi avrà equazione $y - \frac{1}{4}k^2 = m(x - k)$, dove m è la derivata prima della funzione $y = \frac{1}{4}x^2$ calcolata nel punto $x = k$.

Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$dp1 := diff\left(\frac{1}{4} \cdot x^2, x\right)$

$$\frac{1}{2}x \tag{1.4.1}$$

e il suo valore nel punto $x = k$:

$mt := eval(dp1, x = k)$

$$\frac{1}{2}k \tag{1.4.2}$$

Questo è il coefficiente angolare della tangente. Lo sostituiamo nell'equazione:

$yTangente := eval\left(\frac{1}{4}k^2 + m \cdot (x - k), m = mt\right)$

$$\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{2}k(x - k) \tag{1.4.3}$$

$$\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{2}k(x-k) \qquad \textbf{(1.4.3)}$$

Calcoliamo ora l'equazione della perpendicolare alla tangente in P.
Il suo coefficiente angolare sarà:

$$mp := -\frac{1}{mt}$$

$$-\frac{2}{k} \qquad \textbf{(1.4.4)}$$

e la retta, essendo sempre una retta per P, avrà equazione:

$$yPerpendicolare := eval\left(\frac{1}{4}k^2 + m\cdot(x-k), m = mp\right)$$

$$\frac{1}{4}k^2 - \frac{2(x-k)}{k} \qquad \textbf{(1.4.5)}$$

Dobbiamo ora calcolare l'equazione del raggio riflesso, sapendo che il raggio incidente ha equazione $x = k$ e che i due raggi formano angoli uguali con la perpendicolare alla tangente.
Ricordiamo che la tangente dell'angolo tra due rette di coefficienti angolari m_1 e m_2 è:

$$tg\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Supponiamo per semplicità che $k > 0$.
Se β è l'angolo che la retta perpendicolare alla tangente forma con l'asse x, l'angolo che la stessa retta forma con il raggio incidente è $\alpha = \beta - \frac{\pi}{2}$, quindi:

$$tg\alpha = tg\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{tg\beta}$$

Essendo $tg\beta = mp$, avremo che:

$$tg\alpha = tg\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{tg\beta}$$

Essendo $tg\beta = mp$, avremo che:

$$tg\alpha := -\frac{1}{mp}$$

$$\frac{1}{2}k \qquad \textbf{(1.4.6)}$$

Dobbiamo quindi determinare una retta passante per P che formi con la retta p un angolo di tangente uguale alla tangente di α. Sostituiamo nella formula i valori noti:

$$mrifl := solve\left(tg\alpha = \frac{m - mp}{1 + mp\cdot m}, m\right)$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{k^2 - 4}{k} \qquad \textbf{(1.4.7)}$$

Calcoliamo l'equazione del raggio riflesso:

$$yRiflesso := simplify\left(eval\left(\frac{1}{4}k^2 + m\cdot(x - k), m = mrifl\right)\right)$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{k^2 x - 4x + 4k}{k} \qquad \textbf{(1.4.8)}$$

ed intersechiamo questa retta con l'asse y:

$$yFuoco := eval(yRiflesso, x = 0)$$

$$1 \qquad \textbf{(1.4.9)}$$

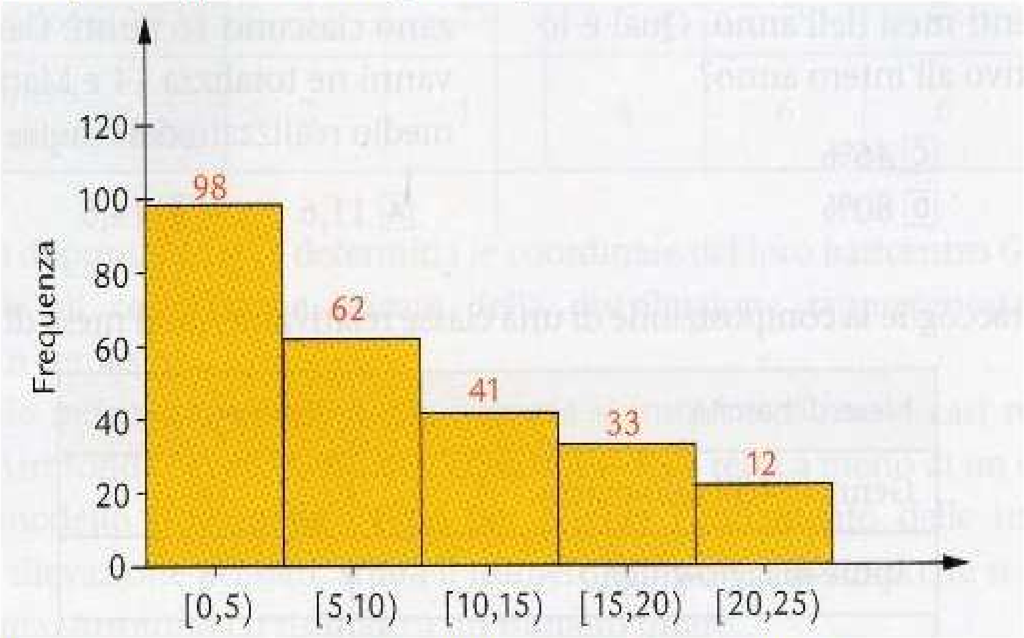
Vediamo che <u>indipendentemente dalla scelta del punto P</u>, individuato dal valore k, il punto di intersezione del raggio riflesso con l'asse y è sempre lo stesso.
Questo punto è detto **FUOCO** della parabola.

Un'altra opportunità

MAPLETA

Vero o falso?

Tra gli studenti di una scuola si è condotta un'indagine circa la distanza tra l'abitazione e la scuola stessa.
La distribuzione delle frequenze è rappresentata nel seguente istogramma.



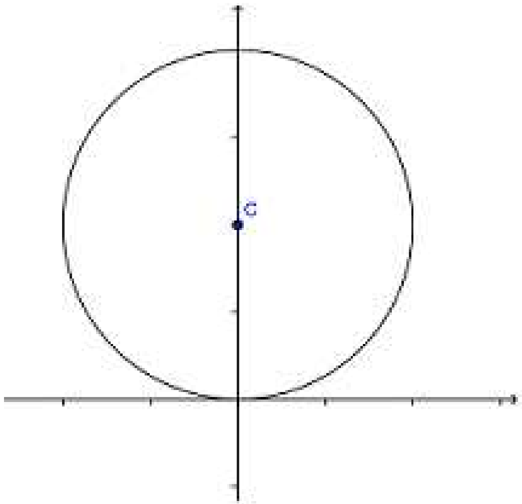
In base a ciò che puoi dedurre da esso, stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere, false o se le informazioni sono insufficienti

Non ci sono alunni che distano più di 40 km da scuola

- ◯ vero ◯ falso ◯ non si può stabilire

Scelta multipla

Qual è l'equazione della circonferenza rappresentata in figura?



- $x^2 + y^2 + ax = 0$
- $x^2 + y^2 + a \cdot x + c = 0$
- $x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot y = 0$
- $x^2 + y^2 + b \cdot y = 0$
- $x^2 + y^2 + b \cdot y + c = 0$

Adaptive question designer

In una società di 30 persone si devono eleggere un coordinatore, un segretario e un tesoriere. Quante sono le scelte possibili?

I Give Up | **Attempt 1 of 3** | Verify

This is an Adaptive Question. If you do not give a correct response, you may be given the opportunity to answer a modified form of the question, possibly for reduced credit.
Use the 'I Give Up' button to move to the next section. You may be penalized for skipping this section.

Adaptive question designer

In una società di 30 persone si devono eleggere un coordinatore, un segretario e un tesoriere. Quante sono le scelte possibili?

4

Abbiamo disponibili 30 elementi di uno stesso insieme (dipendenti della società) e dobbiamo individuare gruppi di tre persone.

Per il calcolo possiamo fare riferimento ai raggruppamenti classici: disposizioni, permutazioni, combinazioni.

Si tratta di decidere a quale dei tre.

Per distinguere dobbiamo osservare due caratteristiche fondamentali: le ripetizioni e l'ordine.

Gli elementi si possono ripetere?

○ no ○ sì

Ha importanza l'ordine?

○ no ○ sì

Attempt 1 of 2

Verify

This is an Adaptive Question. If you do not give a correct response, you may be given the opportunity to answer a modified form of the question, possibly for reduced credit.
Use the 'I Give Up' button to move to the next section. You may be penalized for skipping this section.

Question designer e gli hints

Vogliamo individuare il luogo geometrico dei punti del piano la cui differenza delle distanze dai punti A(-3; 0) e B(3; 0) è uguale a 4. Di che luogo geometrico si tratta?

- ○ iperbole con i fuochi sull'asse y
- ○ iperbole con i fuochi sull'asse x
- ○ ellisse con i fuochi sull'asse x
- ○ parabola con asse parallelo all'asse x
- ○ circonferenza
- ○ ellisse con i fuochi sull'asse y
- ○ parabola con asse parallelo all'asse y

Qual è la sua equazione?

Hint 1 | Hint 2 | Hint 3

Question designer e gli hints

Vogliamo individuare il luogo geometrico dei punti del piano la cui differenza delle distanze dai punti A(-3; 0) e B(3; 0) è uguale a 4.
Di che luogo geometrico si tratta?

- iperbole con i fuochi sull'asse y
- iperbole con i fuochi sull'asse x
- ellisse con i fuochi sull'asse x
- parabola con asse parallelo all'asse x
- circonferenza
- ellisse con i fuochi sull'asse y
- parabola con asse parallelo all'asse y

Hint

A e B rappresentano i .... dell'iperbole, quindi le loro ascisse servono per determinare il parametro c.

Ok

Qual è la sua equazione?

Hint 1 | Hint 2 | Hint 3

Il gradebook

MapleTA permette inoltre di:

- correggere le prove automaticamente
- visualizzare i punteggi
- visualizzare gli errori
- analizzare i dati

IN BREVISSIMO TEMPO

e in più è possibile inserire facilmente formule e grafici nei testi delle prove

grazie per l’attenzione

Donatella Martini - ITIS N.Baldini Ravenna
d.martini8@virgilio.it